

primljen: 19.10.2025.
korigovan: 26.12.2025.
prihvaćen: 24.01.2026.

Pregledni rad

<https://doi.org/10.62683/NiP29.3>

HIPERELASTIČNI MATERIALI: PRIMENA I MATERIJALNO MODELIRANJE

Marina Trajković Milenković¹, Andrija Zorić², Katarina Slavković³

Rezime: Hiperelastični materijali mogu biti izloženi veoma velikim deformacijama i velikom broju ciklusa opterećenja, a da pri tom ostanu u elastičnom režimu ponašanja. Tipični predstavnici ove grupe materijala su guma, elastomeri, pene, neka biološka tkiva. Ovi materijali se primenjuju u inženjerskim konstrukcijama, u automobilske i avioindustriji kao izolatori vibracija i udara. Do njihove ekspanzije dolazi i u oblasti biomehanike pri modeliranju kolagena, mišića i implantanata. U građevinarstvu su deo uređaja koji se primenjuju u sistemu seizmičke bazne izolacije. Kako je mehanički odgovor hiperelastičnih materijala na deformacije izrazito nelinearan, poseban izazov je izbor pouzdanog materijalnog modela koji se koristi za predviđanje ponašanja ovih materijala. Materijalni modeli koji se najčešće koriste u proračunima su: Neo-Hookean, Arruda-Boyce, Mooney-Rivlin, Ogden, Yeoh. U radu će biti predstavljeni najčešće korišćeni modeli pri numeričkom modeliranju ponašanja hiperelastičnog materijala (gume) izloženog velikim cikličnim deformacijama. Ovo će biti predmet daljeg istraživanja autora sa ciljem da se definiše opseg u kome su validni navedeni materijalni modeli za slučaj prostog smicanja, jer su gumeni delovi uređaja za seizmičku izolaciju izloženi upravo velikim smičućim deformacijama.

Ključne reči: hiperelastični materijali, konačne deformacije, ciklično opterećenje, prosto smicanje, seizmički izolator, materijalni modeli.

HYPERELASTIC MATERIALS: APPLICATION AND MATERIAL MODELING

Abstract: Hyperelastic materials can be exposed to very large deformations and a large number of load cycles, while remaining in an elastic regime. Typical representatives of these materials are rubber, elastomers, foams and some biological tissues. Hyperelastic materials are used in engineering structures and in the automotive and aviation industries as vibration and impact isolators. Lately, they find an extensive use in the field of biomechanics when modeling collagen, muscles and implants. In civil engineering, they are the part of devices used in seismic base isolation. Since the stress-strain relation of hyperelastic materials is highly nonlinear, a special challenge is a selection of a reliable material model in order to predict their behavior. The models most often used in numerical analysis are: Neo-Hookean, Arruda-Boyce, Mooney-Rivlin, Ogden, Yeoh. The paper presents frequently used models in numerical analysis of the hyperelastic material (rubber) behavior exposed to large cyclic deformations. This will be the topic of the further research of the authors with the aim to estimate the range of validity of the stated material models for the case of simple shear, since the rubber parts of the seismic isolation devices are exposed to significant shear deformations.

Key words: Hyperelastic Materials, Finite Deformations, Cyclic Loading, Simple Shear, Seismic Isolator, Material Models

1 Dr.-Ing., Vanredni profesor, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija, marina.trajkovic@gaf.ni.ac.rs, ORCID 0000-0001-6874-758X

2 Dr, Docent, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija, andrija.zoric@gaf.ni.ac.rs, ORCID 0000-0002-3107-9204

3 Master inž.građ., Student doktorskih studija, Matematički institut Srpske akademije nauka i umetnosti, Srbija, katarina.slavkovic@mi.sanu.ac.rs, ORCID 0009-0009-9231-285

1 UVOD

1.1 HIPERELASTIČNI MATERIJALI

Hiperelastični materijali su klasa materijala koji mogu da podnesu velike deformacije usled različitih uticaja, a koji se nakon uklanjanja opterećenja u potpunosti vraćaju u prvobitni oblik bez zaostalih deformacija. Gume, elastomeri, meka tkiva i pene su samo neki predstavnici materijala koji pokazuju ovakvo ponašanje.

Za razliku od tradicionalnih elastičnih materijala, ponašanje hiperelastičnih materijala se ne može opisati Hooke-ovim zakonom jer oni pokazuju izrazito nelinearno ponašanje tokom naprezanja, a naročito pri velikim deformacijama. Dijagram zavisnosti između napona i deformacije u hiperelastičnom materijalu, i pored izrazite nelinearnosti, prati skoro isti put tokom opterećenja i rasterećenja. Razlog tome je što se, kao u slučaju gume koja je predmet ovog istraživanja, zanemaruju viskoelastične karakteristike materijala, koje se ogledaju u pojavama kao što su histerezisni efekat, relaksacija ili puzanje. Ove karakteristike, koje su više predmet proučavanja reologije nego teorije elastičnosti, najčešće se modeliraju odvojeno od hiperelastičnog ponašanja [1].

Ukupan rad spoljašnjih uticaja utrošen u procesu deformacije se akumulira u deformabilnom telu i na taj način povećava unutrašnju energiju tela. Akumulirana energija, poznata u teoriji elastičnosti kao energija deformacije, se u potpunosti oslobađa prilikom rasterećenja, budući da se radi o čisto elastičnoj deformaciji. Energija deformacije po jedinici zapremine tela predstavlja specifičnu energiju deformacije, odnosno elastični potencijal. Elastični potencijal predstavlja osnovnu veličinu pri definisanju materijalnih modela kojima se opisuje ponašanje hiperelastičnih materijala, uz uslov da se ovakav materijal (u ovom radu - guma) smatra izotropnim u nedeformisanom stanju. Specifična energija deformacije se u literaturi može naći i pod nazivom funkcija gustine deformacionog rada ili funkcija deformacionog rada [2], [3].

Predviđanje ponašanja hiperelastičnih materijala tokom procesa deformacije je znatno olakšano primenom savremenih softverskih paketa baziranih na metodi konačnih elemenata, što je posledično proširilo polje primene ovih materijala, naročito u oblasti biomehanike [4], [5], [6]. Programski paket ABAQUS ima širok spektar materijalnih modela koji se nude za modeliranje ponašanja hiperelastičnih materijala. Takođe, naprednijim korisnicima programa ABAQUS je omogućeno da, primenom potprograma uhyper,

uvezu u program svoj materijalni model za ovu vrstu materijala. Korišćenje ovakvih naprednih softverskih paketa pri modeliranju ponašanja materijala i struktura svakako zahteva kritičko tumačenje dobijenih numeričkih rezultata, za šta je neophodno značajno teorijsko znanje, kao i iskustvo inženjera, imajući u vidu da se radi o vrlo specifičnoj grupi materijala.

2 PRAKTIČNA IMPLEMENTACIJA HIPERELASTIČNIH MATERIJALA

Ova grupa materijala ima široku primenu u praksi u različitim oblastima, ali će u daljem tekstu biti predstavljena upotreba hiperelastičnih materijala samo u oblasti biomehanike i inženjerstva.

2.1 PRIMENA HIPERELASTIČNIH MATERIJALA U BIOMEHANICI

Hiperelastični materijali imaju značajnu primenu u medicini i stomatologiji. Razvojem numeričkih softvera za modeliranje ponašanja materijala i sve većim raspoloživim resursima računara za zahtevne numeričke proračune, došlo je do značajnog razvoja multidisciplinarnih istraživanja u oblasti medicinskih nauka koja zahtevaju snažnu inženjersku podršku. To je dovelo da su istraživanja iz oblasti biomehanike u poslednje dve dekade doživela veliku ekspanziju. U ovom radu ukratko će biti predstavljena primena hiperelastičnih materijala u pojedinim granama medicinine.

Naime, u biomehaničkim istraživanjima je pokazano da se skoro svaki organ u telu može modelirati kao specifičan tip hiperelastičnog materijala sa odgovarajućim mehaničkim svojstvima [5]. Na primer, u modeliranju mekih tkiva poput kože, mišića, krvnih sudova, kolagena, hrskavice, pri čemu se njihovo ponašanje opisuje kao ponašanje hiperelastičnih materijala, omogućen je razvoj sofisticiranih i realističnih simulacija za planiranje zahvata u hirurgiji, dizajnu proteze i ergonomske studije, kao i u analizi traume i simulaciji povreda [7], [8], [9], [10]. Zbog kompatibilnosti pojedinih hiperelastičnih materijala sa mekim tkivima, neke vrste ovakvih materijala dobijaju sve veću primenu u protetici i kod hirurških implantanata [11]. Dakle, modeliranje organa kao hiperelastičnih materijala sa odgovarajućim mehaničkim svojstvima omogućava bolje razumevanje i analizu ponašanja tih tkiva u različitim uslovima, kao i razvoj boljih medicinskih uređaja i tretmana [12], [13].

Stomatološka nauka o materijalima za restaurativnu stomatologiju je izvedena iz nauke o materijalima i proučava četiri kategorije najzastupljenijih materijala u korektivnoj stomatologiji: metale, keramiku, polimere i kompozite. Kao jedna od navedenih grupa, hiperelastični materijali, posebno elastomeri na bazi silikona, se u stomatologiji obično koriste za izradu zubnih otisaka, ali i samih proteza. Ovi materijali obuhvataju detaljnu morfologiju zuba i okolnih tkiva, obezbeđujući precizne kalupe za izradu krunica, mostova i druge stomatološke protetike. Hiperelastični materijali se mogu koristiti u razvoju modela zubnih implantanata, za simulaciju okolnih mekih tkiva i kostiju [14]. Takođe, hiperelastični materijali se mogu koristiti za kreiranje realističnih simulacija mekih tkiva u svrhe treninga [15]. Simulacioni modeli sa hiperelastičnim svojstvima mogu pomoći studentima stomatologije i praktičarima da uvežbaju procedure na realističnim materijalima pre nego što rade na pacijentima.

2.2 PRIMENA HIPERELASTIČNIH MATERIJALA U INŽENJERSTVU

Hiperelastični materijali igraju značajnu ulogu u inženjerstvu zbog njihove sposobnosti da izdrže značajna opterećenja bez trajne deformacije.

Koriste se u automobilske i avioindustriji zbog njihove sposobnosti da održe integritet zaptivanja i pri velikim deformacijama [16]. Takođe, zbog njihove sposobnosti da se prilagode nepravilnim površinama, koriste se u motorima, hidrauličnim sistemima i industrijskim mašinama za sprečavanje curenja tečnosti i gasova.

Jedna od najpoznatijih upotreba ovih materijala je u proizvodnji pneumatika. Guma pruža neophodnu elastičnost da apsorbira udarce, održava vuču i izdrži različite uslove na putu. Hiperelastičnost omogućava gumama da se deformišu i efikasno oporavljaju, pružajući stabilnost i udobnost tokom vožnje [1], [17].

Hiperelastičnost omogućava nosačima motora da se značajno deformišu pod dinamičkim opterećenjima istovremeno obezbeđujući efikasnu izolaciju vibracija. Ovi nosači se koriste u mašinama, vozilima i avioindustriji kako bi se smanjila buka i ublažio uticaj zamora u konstrukciji. Takođe, doprinose amortizaciji udara i vibracija u mašinskim sistemima, čime se postiže bolja preraspodela uticaja opterećenja u konstrukciji, što rezultira poboljšanim performansama celokupnog sistema [18].

Kod građevinskih valjkova, takođe sprečavaju prenošenje vibracija na rukovaoce mašinama i omogućuju pravilan i pouzdan rad mašine.

Koriste se i za proizvodnju zaštitne opreme za povećanje udobnosti, fleksibilnosti i apsorpcije udara.

U poslednje vreme sve više dolazi do razvoja meke robotike, oblasti koja ima za cilj razvoj robota sa kompatibilnim i deformabilnim strukturama koje liče na biološke organizme. Hiperelastični materijali omogućavaju proizvodnju fleksibilnih, rastegljivih i usklađenih komponenti robota, kao što su hvataljke, aktuatori i veštački mišići. Cilj je da meki roboti napravljeni od hiperelastičnih materijala mogu bezbedno i efikasno da komuniciraju sa ljudima i delikatnim predmetima, otvarajući nove mogućnosti za primene u oblastima kao što su zdravstvena zaštita, rehabilitacija i interakcija čoveka i robota [19], [20].

U građevinarstvu se hiperelastičnim materijalima, poput gume, može izvršiti amortizacija vibracija kroz konstrukciju, koje su posledica rada mašina i kretanja transportnih sredstava kroz objekte. Njihova sposobnost ublažavanja seizmičke sile i raspodele opterećenja može smanjiti naprezanja u konstrukciji i produžiti eksploatacioni vek objekta [21]. Pored izolacije vibracija, hiperelastični materijali, kao što su pene, mogu poboljšati izolaciju od buke, kao i toplotnu izolaciju kod zidova, podova i plafona, direktno utičući na energetske efikasnosti objekta.

U građevinskom konstrukterstvu se za kontrolu vibracija primenjuju seizmički izolatori. Ovi uređaji poseduju veliku krutost u vertikalnom pravcu i malu krutost, odnosno veliku fleksibilnost u horizontalnom pravcu, čime se njihovom primenom u sistemu bazne izolacije povećava period osnovnih vibracija konstrukcije i smanjuju seizmičke sile [22]. Seizmički izolatori se dele u zavisnosti od načina na koji se obezbeđuje horizontalna fleksibilnost, a jedan od tipova su elastomerna ležišta. Osnovni deo elastomernih ležišta predstavljaju elementi od prirodne ili sintetičke gume [23], [24], [25].

Klizna ležišta predstavljaju drugi tip seizmičkih izolatora koji obezbeđuju seizmičku izolaciju objekta klizanjem delova seizmičkog izolatora. Međutim, nedostatak elastičnih kliznih ležišta se ogleda u tome da su pomeranja usled klizanja delova izolatora trajna, odnosno, nakon delovanja zemljotresa seizmički izolator se ne vraća u početni položaj. Zbog toga su elastična klizna ležišta kombinovana sa gumenim oprugama ili elastomernim ležištima. U gumenim oprugama se akumulira povratna poprečna sila koja omogućava centriranje kliznog ležišta u početni položaj nakon dejstva zemljotresa [26], [27], [28].

Za formulisanje proračunskog modela konstrukcije sa ovim tipovima seizmičkih izolatora, neophodno je poznavanje njihovih mehaničkih karakteristika, a koje direktno zavise od mehaničkih karakteristika gume

(hiperelastičnog materijala) od kojeg su formirani [29], [30], [31].

3 MODELIRANJE HIPERELASTIČNIH MATERIJALA

Matematička formulacija ponašanja hiperelastičnih materijala uključuje definisanje funkcije energije deformacije (takođe poznate kao potencijal deformacije ili funkcija uskladištene energije) koja predstavlja energiju akumuliranu u materijalu tokom procesa deformacije.

S ciljem da se što preciznije opiše složeno mehaničko ponašanje hiperelastičnih materijala pod različitim uslovima opterećenja, razvijeni su različiti hiperelastični materijalni modeli, pri čemu svaki model ima određeni oblik funkcije energije deformacije prilagođen različitim vrstama materijala i njihovom mehaničkom ponašanju. Ovi materijalni modeli mogu sadržati dodatne parametre, funkcije višeg reda ili specijalizovane forme.

Materijalni modeli koji se koriste za predviđanje ponašanja hiperelastičnih materijala se uglavnom baziraju na fenomenološkim razmatranjima. Ovi materijalni modeli predstavljaju matematičke funkcije koje su formirane tako da opišu makroskopska mehanička svojstva hiperelastičnih materijala usled deformacije, a nastale su na zaključcima donešenim posmatranjem i empirijskim podacima, a ne nužno na fundamentalnoj teoriji mikrostrukture materijala. Proučavanje ponašanja materijala na mikroskopskom nivou tokom procesa deformacije spada u domen fizičkih teorija. Fizičke teorije se bave detaljnim proučavanjem mehanizama deformacija, no one izlaze iz okvira ovog rada.

Takođe, materijalni modeli koje ćemo razmatrati imaju različite početne pretpostavke. Neki su jednostavniji i sadrže samo jedan parameter, pružajući time matematički jednostavan i numerički manje zahtevan, ali dovoljno pouzdan model ponašanja materijala. Drugi su složeniji, sadrže više članova u funkciji energije deformacije, a posledično i veći broj ulaznih parametara, ali se očekuje i njihova veća tačnost. Zbog svoje fenomenološke osnove, primena ovih materijalnih modela u inženjerskoj praksi je pogodna, jer su relativno jednostavni za implementaciju i omogućavaju kalibraciju na osnovu eksperimenatalnih rezultata. No, treba istaći da, u skladu sa analiziranim tipom materijala i njegovim mehaničkim svojstvima, kao i vrsti i intenzitetu deformacije kojoj je material izložen, najvažniji korak

u numeričkom proraračunu je odabir adekvatnog materijalnog modela [3], [31], [32], [33].

U odeljku 3.4 biće predstavljeni najčešće korišćeni materijalni modeli za numeričko predviđanje ponašanja hiperelastičnih materijala. Međutim, pre toga ćemo uvesti neophodne kinematičke veličine potrebne za opisivanje ponašanja ovakvih materijala.

3.1 KINEMATIČKA POSTAVKA PROBLEMA

Proces deformacije deformabilnog tela od njegove početne do trenutne konfiguracije predstavlja promenu oblika, zapremine i položaja posmatranog tela. Dok promena oblika i zapremine dovodi do variranja rastojanja između proizvoljno izabranih parova čestica tela, promena položaja prati kretanje krutog tela kao celine, odnosno translaciju i rotaciju. Rotacija zauzima značajno mesto u analizi velikih deformacija, koje su predmet ovog istraživanja.

Promena položaja odabrane materijalne tačke tela tokom procesa deformacije se u potpunosti definiše gredijentom deformacije:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (1)$$

gde je sa $\mathbf{X}$ obeležen položaj materijalne tačke u početnoj konfiguraciji, a sa $\mathbf{x}$ u trenutnoj konfiguraciji.

Takođe važi:

$$J = \det(\mathbf{F}), \quad (2)$$

gde J predstavlja Jakobijan, odnosno ukupnu promenu zapremine posmatranog tela.

Brzina $\mathbf{v}$ i tenzor gradijenta brzine $\mathbf{L}$ posmatrane čestice su definisani sledećim relacijama:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (3)$$

Rotacija, posebno u kombinaciji sa deformacijom, je fundamentalna u nelinearnoj mehanici kontinuuma. Najvažnija teorema koja razjašnjava ulogu rotacije u slučaju velikih deformacija je teorema o polarnoj dekompoziciji.

Sledeći ovu teoremu, gradijent deformacije $\mathbf{F}$, kao nesusingularni tenzor drugog reda, se može jedinstveno multiplikativno razložiti u simetrični tenzor drugog reda $\mathbf{V}$ (levi tenzor izduženja) koji opisuje čistu deformaciju, i ortogonalni tenzor drugog reda $\mathbf{R}$ (tenzor rotacije) koji opisuje čistu rotaciju, tako da, u slučaju leve polarne dekompozicije, važi:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}. \quad (4)$$

Kvadrat levog tenzora izduženja V (deformacije) predstavlja Levi Cauchy-Green-ov tenzor deformacije B :

$$B = V^2 = F \cdot F^T. \quad (5)$$

Levi Cauchy-Green-ov tenzor deformacije B je znatno pogodniji za numeričku implementaciju, pa će u daljem izvođenju on biti korišćen umesto samog tenzora izduženja V .

3.2 MERA NAPONA I MERA DEFORMACIJE

Kako je u ovom radu usvojena Euler-ova deskripcija, tj. za definisanje položaja posmatrane materijalne tačke tela, umesto materijalnih koordinata, kao nezavisno promenljive koriste se prostorne koordinate, i mere napona i deformacije moraju biti konjugovane veličine po radu u istoj formulaciji. U Euler-ovoj deskripciji to su Kirchhoff-ov napon τ i Euler-ova Hencky-eva (stvarna, logaritamska) deformacija h , za koju važi da je:

$$h = \ln V. \quad (6)$$

Za izotropne elastične materijale Kirchhoff-ov napon je:

$$\tau = J \cdot \sigma, \quad (7)$$

gde je σ Cauchy-ev ili stvarni napon. U slučaju čistog smicanja, koji će biti predmet daljeg istraživanja autora, nema promene zapremine deformabilnog tela, tj. Jakobijan je jednak jedinici, pa je stvarni, odnosno Cauchy-ev napon jednak Kirchhoff-ovom naponu. Samim tim i odnos između stvarnog napona σ i stvarne dilatacije h se može direktno uspostaviti, tj. u ovom slučaju ove mere deformacije i napona su konjugovane vrednosti u radu, pa se i numerički rezultati mogu predstaviti kao odnos ovih veličina. Za detaljnije informacije o važnosti uvođenja konjugovanih mera napona i deformacija čitalac se upućuje na reference [34] i [35].

3.3 PREDUSLOVI ZA PRAVILNO MODELIRANJE PONAŠANJA HIPERELASTIČNIH MATERIJALA PRI KONAČNIM DEFORMACIJAMA

Deformaciju tela može posmatrati jedan ili više fizičkih posmatrača i stoga se ona može opisati na više različitih načina. Kako fizičke pojave ne zavise od izbora posmatrača, a kinematički opisi istih da, o objektivnosti treba posebno voditi računa pri matematičkoj formulaciji fizičkih zakona kao što su konstitutivni modeli. Pojam objektivnosti je izuzetno

važan u analizi velikih deformacija i detaljno je obrađen u referencama [3] i [34].

Invarijantnost napreznja podrazumeva da mehanički odgovor materijala treba da bude nezavisan od koordinatnog sistema koji se koristi za opisivanje deformacije. Ovo se postiže merama deformacija, kao što su invarijante deformacija, koje su skalarne veličine koje opisuju deformaciju nezavisno od koordinatnih sistema.

Ukratko, invarijantnost deformacija i objektivnost su fundamentalni principi u opisivanju ponašanja hiperelastičnih materijala koji osiguravaju pouzdanost, konzistentnost i primenljivost materijalnih modela u različitim scenarijima deformacije i koordinatnim sistemima. Uključivanje ovih principa u materijalne modele poboljšava njihovu tačnost i prediktivne sposobnosti modela, čineći ih neprocenjivim alatima u inženjerstvu, biomehanici i nauci o materijalima.

3.4 KONSTITUTIVNE JEDNAČINE HIPERELASTIČNIH MATERIJALA

Osnovna veličina na kojoj se baziraju konstitutivne relacije, koje važe za hiperelastične materijale, je gustina energije deformacije. Ona predstavlja akumuliranu energiju u telu tokom procesa deformacije. Kako gustina energije deformacije, u našem razmatranju, direktno zavisi od levog Cauchy-Green tenzora deformacije B , a on je izvedena veličina gradijenta deformacije F , možemo reći da i gustina energije deformacije posredno zavisi od gradijenta deformacije. Stoga važi:

$$U = U(F). \quad (8)$$

Za izotropne, hiperelastične materijale nalik gumi, energija deformacije U se najčešće izražava u funkciji invarijanti devijatorskog dela tenzora deformacije:

$$U = U(\bar{I}_1, \bar{I}_2) - \frac{1}{2} p (\bar{I}_3 - 1), \quad (9)$$

pri čemu $\frac{1}{2} p$ ima ulogu Lagrange-ovog množioca, a invarijante su označene nadvučenom crtom jer predstavljaju invarijante devijatorskog dela tenzora deformacije. Kako su u pitanju nestišljivi materijali, promena zapremine deformabilnog tela je zanemarena, jer je sferni deo tenzora deformacije jako mali ili jednak nuli, te se stoga može smatrati da ne utiče na promenu energije defofmacije.

Prva invrijanta levog Cauchy-Green tenzora deformacije (uvedena u prethodnom izrazu) se definiše kao:

$$\bar{I}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{trace } \bar{B} = I : \bar{B}, \quad (10)$$

gde $\mathbf{I}$ predstavlja jedinični tenzor drugog reda, dok je druga invarijanta tenzora deformacije po definiciji jednaka:

$$\begin{aligned}\bar{I}_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\bar{I}_1^2 - \text{trace}(\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}})) = \\ &= \frac{1}{2}(\bar{I}_1^2 - \mathbf{I} : (\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}})).\end{aligned}\quad (11)$$

Kao što je ranije istaknuto, kod nestišljivih materijala zapremina ostaje konstantna tokom deformacije (iako se ti materijali mogu značajno deformisati u obliku), pa sledi da za njih važi da je Jakobijan $J = 1$, odnosno da je treća invarijanta jednaka jedinici.

Za nestišljive ili skoro nestišljive materijale postoje više oblika potencijala energije deformacije na osnovu kojih se definišu različiti hiperelastični materijalni modeli. Neki od najčešće primenjivanih modela su: neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Ogden, Arruda-Boyce, Yeoh, Van der Waals. U daljem tekstu biće predstavljeni samo najčešće korišćeni, dok se za više informacija, detaljnije izvođenje i analizu svih navedenih i drugih značajnih hiperelastičnih modela, čitalac se upućuje na reference [4], [32], [36] i [37].

U daljem tekstu pokazaćemo kako se energija deformacije, a bazirani na nju i materijalni hiperelastični modeli, definišu u programskom paketu ABAQUS, gde se, radi opšteg pristupa, i kompresibilni materijali moraju obuhvatiti. Iz tog razloga numeričko-materijalni modeli uzimaju u obzir i uticaj zapreminske deformacije u najopštijem sličaju za bilo koji hiperelastični material, a nestišljivi materijali se potom razmatraju kao specijalni slučaj.

Stoga se za definisanje potencijala energije deformacije koristi uopšteni izraz:

$$U = f(\bar{I}_1 - 3, \bar{I}_2 - 3) + g(J_{el} - 1), \quad (12)$$

iz čega vidimo da je potencijalna energija definisana dvema funkcijama, od kojih jedna zavisi od prve i druge varijante devijatorskog dela tenzora deformacije, a druga funkcija je u zavisnosti od zapreminske deformacije J_{el} .

Elastična zapreminska deformacija J_{el} se definiše preko ukupne zapreminske deformacije J i termalne zapreminske deformacije J_{th} sledećim odnosom:

$$J_{el} = \frac{J}{J_{th}}. \quad (13)$$

J_{th} zavisi od koeficijenta linearnog toplotnog širenja ε_{th} i određuje se primenom sledeće relacije:

$$J_{th} = (1 + \varepsilon_{th})^3. \quad (14)$$

Na ovaj način moguće je uključiti i uticaj temperature u analizu ponašanja materijala pri deformaciji, čime se omogućava preciznije predviđanje mehaničkog odziva u uslovima termomehaničkog opterećenja.

Definisanjem funkcije g kao:

$$g = \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J_{el} - 1)^{2i}, \quad (15)$$

i razvijanjem:

$$f(\bar{I}_1 - 3, \bar{I}_2 - 3) \quad (16)$$

u Taylor-ov red, dobija se:

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J_{el} - 1)^{2i}. \quad (17)$$

Ova jednačina predstavlja polinomski prikaz potencijalne energije deformacije i osnova je pri definisanju različitih hiperelastičnih materijalnih modela, a koji su na ovaj način inkorporirani i u programski paket ABAQUS, koji će autori koristiti u daljem istraživanju. Parametar N , određuje broj članova u funkciji energije deformacije i uzima vrednosti do najviše šest, ali se vrednosti veće od 2 retko koriste u slučaju kada se uzimaju u obzir prva i druga invarijanta tenzora deformacije. Koeficijenti C_{ij} i D_i su parametri materijala. Koeficijent D_i definiše kompresibilnost materijala. Interesantno je naglasiti da razdvajanje na devijatorsku i zapreminsku komponentu energije deformacije u prethodnoj jednačini omogućava materijalnom modelu da opisuje kako gotovo inkompresibilno, tako i kompresibilno ponašanje materijala, podešavanjem parametara D_i . Što je vrednost ovog parametra manja, to je materijal manje podložan promeni zapremine, odnosno pokazuje veći stepen inkompresibilnosti.

Važni ulazni parametri koji ne zavise od N i koje je potrebno definisati su početni modul smicanja μ_0 i modul kompresije k_0 :

$$\mu_0 = 2(C_{10} + C_{01}), \quad k_0 = \frac{2}{D_1}. \quad (18)$$

Tokom sprovođenja numeričkih analiza u ABAQUS-u, prilikom definisanja materijala potrebno je uneti vrednosti koeficijenata C_{10} , C_{01} i D_1 . Koeficijent C_{10} je osnovni koeficijent koji kontroliše elastično ponašanje materijala pri malim deformacijama, dok koeficijent C_{01} uzima u obzir uticaj druge invarijante tenzora deformacije. Dakle, ovi koeficijenti definišu nelinearno ponašanje hiperelastičnih materijala u funkciji energije deformacije, a njihove vrednosti se određuju eksperimentalnim ispitivanjima posmatranog materijala.

Ukoliko je u jednačini (17) usvoji da je $j = 0$, dobija se redukovana polinomna forma:

$$U = \sum_{i=1}^N C_{i0} (\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J_{el} - 1)^{2i}. \quad (19)$$

Ukoliko se redukovani polinomni oblik dodatno pojednostavi tako što se za N usvoji vrednost jedan, dobija se funkcija iz koje kasnije sledi poznati neo-Hookean-ov materijalni model:

$$U = C_{10} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D_1} (J_{el} - 1)^2. \quad (20)$$

Neo-Hookean-ov model predstavlja najjednostavniji materijalni model za opisivanje ponašanja hiperelastičnih materijala. Pogodan je za male deformacije i koristi se za rad sa elastičnim materijalima čije karakteristike nisu precizno definisane.

Ukoliko se u jednačini (17) usvoji da je $N = 1$, u okviru devijatorskog dela deformacije ostaju samo linearni članovi iz polinoma, čime se dobija Mooney-Rivlin-ov materijalni model:

$$U = C_{10} (\bar{I}_1 - 3) + C_{01} (\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{D_1} (J_{el} - 1)^2. \quad (21)$$

Mooney-Rivlin-ova forma se obično koristi za opisivanje ponašanja izotropnih materijala koji su nalik gumi, bioloških tkiva, kao i polimera koji su podvrgnuti velikoj deformaciji.

Mooney-Rivlin-ov materijalni model je sličan neo-Hookean-ovom modelu, ali uključuje i uticaj druge invarijante levog Cauchy-Green tenzora, za razliku od neo-Hookean-ovog koji koristi samo prvu invarijantu. Mooney-Rivlin-ovim modelom se bolje opisuje ponašanje materijala u poređenju sa eksperimentalnim podacima u odnosu na neo-Hookean-ov model. Međutim, zajedničko za oba modela je da koriste jednostavne (samo linearne) funkcije invarijanti u izrazu za energiju deformacije, pa stoga nemaju kapacitet da numerički prikažu nagli porast napona i promenu oblika krive napon-deformacija pri velikim deformacijama, što se kod realnih hiperelastičnih materijala često javlja.

Ukoliko se potencijalna energija izražava preko glavnih izduženja (elongacija):

$$\lambda = \frac{dl}{dL} = \frac{\sqrt{d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x}}}{\sqrt{d\mathbf{X}^T \cdot d\mathbf{X}}}, \quad (22)$$

dobija se Ogden-ov materijalni model koji se često koristi za opisivanje ponašanja materijala koji podnose vrlo velike deformacije. Energija deformacije za ovaj model se formuliše u sledećem obliku:

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J_{el} - 1)^{2i}, \quad (23)$$

gde su:

$$\bar{\lambda}_i = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_i \rightarrow \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 = 1, \quad (24)$$

a $\lambda_i, (i=1,2,3)$, predstavljaju glavna izduženja.

Prvi član Ogden-ove formulacije potencijala energije deformacije zavisi od prve i druge invarijante levog Cauchy-Green tenzora.

Pri numeričkim analizama u ABAQUS-u, odabirom Ogden-ovog modela potrebno je definisati vrednosti za N, μ_i i α_i . Ukoliko se u jednačini (23) definiše da je $N = 2, \alpha_1 = 2$ i $\alpha_2 = -2$, dobija se Mooney-Rivlin-ov model. U slučaju da je $N = 1$ i $\alpha_1 = 2$, dobija se oblik neo-Hookean-ovog modela. Na osnovu prethodnog se može zaključiti da se ova dva jednostavnija modela mogu definisati i kao specijalni slučajevi formulacije Ogden-ovog modela.

U slučaju Ogden-ovog materijalnog modela, inicijalni modul smicanja se definiše kao suma svih modula smicanja tokom deformacije:

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^N \mu_i. \quad (25)$$

Početni modul kompresije k_0 zavisi od koeficijenta D_1 .

Od svih do sada predstavljenih modela, Ogdenov model sa $N = 3$ odlično prikazuje ponašanje materijala sličnih gumi, omogućavajući veću fleksibilnost u modeliranju ponašanja materijala sa velikim deformacijama.

Do sada analizirani modeli nisu pogodni za analizu ponašanja materijala čiji modul smicanja značajno varira sa deformacijom, odnosno ukoliko modul smicanja opada sa povećanjem deformacije u početku, a zatim ponovo raste sa velikim deformacijama. Takvo ponašanje pokazuju gume sa dodacima, na primer čađem, i kompozitni materijali kao što su elastomeri sa karbonskim vlaknima. Hiperelastični model koji je pogodniji za opisivanje ovakvih materijala je Arruda-Boyce.

Ovaj hiperelastični model se definiše sledećom formom energijom deformacije:

$$U = \mu \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{\lambda_m^{2i-2}} (\bar{I}_1^i - 3^i) + \frac{1}{D} \left(\frac{J_{el}^2 - 1}{2} - \ln J_{el} \right), \quad (26)$$

gde je:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{20}, \quad C_3 = \frac{11}{1050}, \\ C_4 &= \frac{19}{7000} \quad \text{i} \quad C_5 = \frac{519}{673750}. \end{aligned} \quad (27)$$

Veza između početnog modula smicanja μ_0 i efektivnog modula smicanja μ se može predstaviti sledećom relacijom:

$$\mu_0 = \mu \left(1 + \frac{3}{5\lambda_m^2} + \frac{99}{175\lambda_m^4} + \frac{513}{875\lambda_m^6} + \frac{42039}{67375\lambda_m^8} \right). \quad (28)$$

Standardna vrednost za λ_m je 7, pa za modul smicanja važi:

$$\mu_0 = 1.0125\mu. \quad (29)$$

Za inicijalni modul kompresije se se usvaja vrednost:

$$K_0 = \frac{2}{D}, \quad (30)$$

gde je D , kao i do sada, parametar kompresibilnosti materijala.

Arruda-Boyce daje zadovoljavajuću tačnost za većinu elastomernih materijala kod inženjerskih problema. On se koristi za materijale koji pokazuju izrazito nelinearno ponašanje pri deformacijama. Preporučuje se u analizama koja uključuju ponovljene ili ciklične deformacije.

Još jedan materijalni model će biti samo naveden, a to je Hencky-ev model [38], [39]. On može biti pouzdan, na primer, za predviđanje ponašanja membrane od silikonske gume pod relativno velikim smičućim deformacijama. Pouzdanost modela zavisi od specifičnih karakteristika silikonske gume i opsega smičućih deformacija uključenih u primenu. Analiza ovog hiperelastičnog modela biće predmet daljeg istraživanja autora.

Definisanje novih materijalnih modela koji bi što preciznije opisali relno ponašanje hiperelastičnih materijala pri raznim vidovima opterećenja je aktivno polje istraživanja. Čitalac se upućuje na jedan od novih pristupa koji je prikazan u referenci [40].

Izbor materijalnog modela zavisi od specifičnih svojstava materijala i opsega deformacija koji se razmatraju. Za materijale koji podnose vrlo velike deformacije (kao što je guma), Ogden ili Arruda-Boyce modeli su često najpogodniji. Za materijale sa manje složenim ponašanjem, Neo-Hookean-ov ili Mooney-Rivlin-ov model daju zadovoljavajuću tačnost.

4 REZULTATI ISTRAŽIVANJA U OBLASTI MODELIRANJA HIPERELASTIČNIH MATERIJALA

4.1 GLAVNI CILJEVI ISTRAŽIVANJA

Motiv autora za istraživanje u ovoj oblasti bio je detaljnije upoznavanje sa hiperelastičnim materijalima i bolje razumevanje njihovog ponašanja tokom različitih procesa deformacije. Cilj ovog istraživanja je detaljnije proučavanje materijalnih modela koji se koriste u numeričkim modeliranjima ponašanja hiperelastičnih materijala, kao i odabir onih koji ponašanje ovakvih materijala mogu što vernije da predvide u opsegu deformacija koje su predmet interesovanja autora. U tu svrhu se, u daljim istraživanjima autora, planira sprovođenje detaljne numeričke analize izabranog materijala – gume na jednom od osnovnih numeričkih modela, tj. prostom smicanju primenom gore navedenih materijalnih modela. Ovo istraživanje je potrebno radi boljeg razumevanja i adekvatnog predviđanja ponašanja gumenih slojeva koji su delovi složenog sklopa - elastomernog seizmičkog izolatora sa olovnom jezgrom, prikazanog na Slici 1, a sve u cilju obezbeđivanja dobrih podloga za dalje istraživanje autora u oblasti proučavanja seizmičke zaštite građevinskih objekata. Ovaj tip izolatora se sastoje od prirodne ili sintetičke gume unutar koje se nalaze tanke čelične ploče (čelični listići), a na krajevima su debele čelične ploče za montažu izolatora u konstrikciju objekta (Slika 1). Čelični listići povećavaju vertikalnu krutost izolatora, koja je nekoliko stotina puta veća od horizontalne krutosti. Pored toga, čelični listići smanjuju poprečnu deformaciju gume usled aksijalnog opterećenja, što je posledica manjeg koeficijenta poprečne kontrakcije čelika u odnosu na gumu. S druge strane, čelični listići imaju zanemarljiv uticaj na horizontalnu krutost izolatora, koja zavisi samo od modula smicanja elastomera. Olovno jezgro se karakteriše relativno malom granicom tečenja, pa se usled deformacije smicanja olovnog jezgra obezbeđuje apsorpciju seizmičke energije [31].

Istraživanja naprezanja i deformacije u pojedinim komponentama seizmičkog izolatora su izuzetno retka. Iz dobijenih rezultata [30], može se zaključiti da se ponašanje materijala u izolatoru, i izolatora u celini, mora pravilno predvideti tokom konačne, posebno ciklične deformacije. Stoga, izabrani konstitutivni zakon ima ključnu ulogu u ispravnom predviđanju ponašanja materijala pri velikim deformacijama.

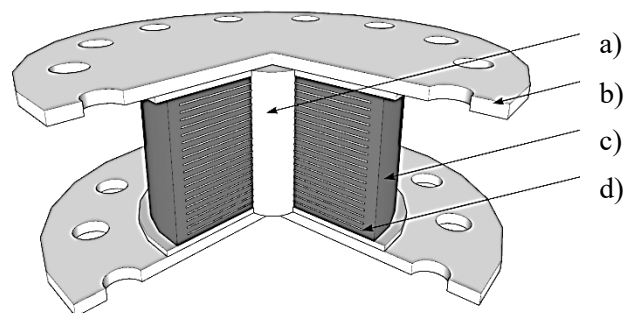
Slojevi gume u seizmičkom izolatoru trpe izuzetno velike smičuće deformacije i njihova uloga i jeste ta da, zbog svojih materijalnih karakteristika, prime izuzetno velika horizontalna pomeranja u odnosu na njihove inicijalne dimenzije. Ova pomeranja tokom zemljotresa mogu biti izuzetno velika, tj. odnos poprečnog pomeranja i visine posmatranog elementa može biti i veći od 100% [23], [25]. Ponašajući se na ovaj način, gumeni slojevi u seizmičkom izolatoru daju svoj doprinos zaštiti nadkonstrukcije od katastrofalnih posledica usled pomeranja tla pri iznenadnom udaru zemljotresa. Nakon prestanka seizmičke ekscitacije, gumeni delovi se nelinearno elastično vraćaju u svoj prvobitni položaj. Ukoliko i dođe do oštećenja ovih slojeva, ili bilo kog dela izolatora, predviđena je mogućnost da se jedan ili više seizmičkih izolatora, koji su postavljeni u donjem delu konstrukcije, u celosti mogu zameniti. Značajna oštećenja nadkonstrukcije i ogromna materijalna šteta, koja skoro uvek prati seizmička dejstva tla, bi na ovaj način bila sprečena, ili bar umanjena. No, svakako najznačajniji zadatak seizmičke izolacije konstrukcija je pre svega zaštita ljudskih života, u slučaju nepredvidljivih seizmičkih aktivnosti tla.

U poslednjih nekoliko decenija sprovedene su brojne eksperimentalne, analitičke i numeričke studije seizmičkih izolacionih sistema. Sve analize su uglavnom fokusirane na globalno ponašanje seizmičkog izolatora, pri čemu su usvojeni standardni odnosi napon-deformacija za materijale koji se primenjuju. Svrha ovih analiza je da se dobije zavisnost sila-pomeranje i krutost seizmičkog izolatora, koji se koriste kao ulazni podaci za dalju analizu ponašanja konstrukcija različitih strukturnih sistema tokom dejstva zemljotresa.

Bitno je napomenuti da na izbor materijalnog modela hiperelastičnih materijala i njegovu pouzdanost mogu uticati i drugi faktori kao što su temperatura, brzina opterećenja i specifična formulacija elastomera. Eksperimentalna validacija, gde se stvarni odgovor materijala upoređuje sa predviđanjima modela, ključna je za procenu tačnosti i pouzdanosti izabranog materijalnog modela za određeni materijal i scenario deformacije.

6 DISKUSIJA

U ovom radu autori glavni fokus stavljaju na pregled najvažnijih karakteristika najčešće korišćenih materijalnih modela pri modeliranju hiperelastičnih materijala.



Slika 1 – Elastomerni seizmički izolator – a) olovno jezgro, b) gornja čelična ploča, c) vulkanizirana guma, d) čelični limovi – izvor [30]

Neo-Hookean-ov model predstavlja najjednostavniji hiperelastični model, čija je funkcija energije deformacije jednostavne polinomske forme sa samo jednim ulaznim parametrom u slučaju nekompresibilnih materijala. Preporučuje se za male do umerene deformacije mekih elastomera, gume i bioloških tkiva (približno do 30%). Ovaj model daje pouzdane rezultate za sve vidove deformisanja u navedenom opsegu, stabilan je u numeričkim simulacijama i ne zahteva veće računarske resurse jer je zbog jednostavne forme pogodan za brz i efikasan proračun. Takođe, pri korišćenju eksperimentalnih podataka, identifikacija parametara za ovaj model je jednostavna. Ovi parametri se koriste u numeričkoj analizi kao ulazni podaci. Međutim, ovaj materijalni model ne pokazuje dovoljnu preciznost pri predviđanju ponašanja hiperelastičnih materijala u slučaju velikih deformacija.

U slučaju umerenih deformacija (30-100%), za preciznije opisivanje nelinearnog ponašanja pogodniji je Mooney-Rivlin-ov model. Najčešće se primenjuje u numeričkim analizama ponašanja automobilske gume, zaptivača ili elastomera. On predstavlja poboljšanje u odnosu na Neo-Hookean-ov model, mada je za njegovo opisivanje potrebno definisati minimum dva, a može i do pet parametara. U odnosu na Neo-Hookean-ov model bolje opisuje različite režime deformacije, posebno smicanje. Njegova generalna prednost u odnosu na sve materijalne modele je da pruža dobar balans između tačnosti i jednostavnosti pri modeliranju. No, nedostatak ovog modela je da se gubi njegova preciznost u modeliranju ponašanja materijala pri vrlo velikim deformacijama.

Kada je potrebna visoka preciznost pri velikim deformacijama (>100% pa i do 700%), Ogden-ov model daje zadovoljavajuće rezultate. Češće se primenjuje u bioinženjeringu za modeliranje bioloških tkiva, ljudske kože i mišića. Odličan je i za analizu

ponašanja silikona, poliutereana i drugih sintetičkih elastomera. Jedino ograničenje Ogden-ovog modela je veliki broj ulaznih parametara čije određivanje zahteva više eksperimentalnih podataka. Takođe, zbog velikog broja parametara ukoliko nije dobro kalibrisan može biti nestabilan u numeričkim simulacijama. Podjednako kompleksan, a numerički stabilniji model u odnosu na Ogden-ov je Arruda-Boyce materijalni model. Ovaj model je razvijen iz potrebe matematičkog opisivanja mehaničkog ponašanja punjenih gumenih materijala, čije nelinearno ponašanje je izraženije u odnosu na klasične nepunjene gumene materijale. Model Arruda-Boyce zasniva se na mikrostrukтури materijala i zato se za biološke materijale može koristiti samo onda kada je i njihova mikrostruktura poznata. Odličan je za numeričke simulacije velikih deformacija (>300-400%).

Osnovni motiv autora za proučavanje mehaničkog ponašanja hiperelastičnih materijala proističe iz njihove upotrebe u uređajima za seizmičku izolaciju, u ovom slučaju elastomernog seizmičkog izolatora. Konstrukcija ovih izolatora predstavlja složeni sklop više elemenata – materijala. Za pravilno modeliranje elastomernog seizmičkog izolatora potrebno je poznavanje ponašanja svih njegovih delova. Zbog toga, buduća istraživanja autora biće usmerena ka detaljnoj analizi svakog materijala u izolatoru, s ciljem utvrđivanja pravilnog ponašanja izolatora kao celine, posebno pri velikim cikličnim deformacijama.

5 ZAKLJUČAK

U ovom radu predstavljene su osnovne karakteristike i moguća primena hiperelastičnih materijala u inženjerstvu i biomehanici. Hiperelastični materijali su grupa materijala sa karakterističnim ponašanjem pri velikim deformacijama. Materijali kao što su guma, pene, elastomeri i biološka tkiva, odlikuju se izrazito nelinearnim, a ujedno i elastičnim odgovorom pri deformisanju. Navedeni materijali se zbog svog karakterističnog mehaničkog ponašanja nazivaju hiperelastičnim materijalima. S obzirom na rastući trend upotrebe ovih materijala u inženjerstvu, urađen je pregled literature i predstavljena su trenutno najaktuelnija istraživanja u različitim inženjerskim granama na ovu temu.

Cilj ovog rada je upoznavanje sa osobinama i upotrebom hiperelastičnih materijala i mogućnostima za njihovo precizno modeliranje u numeričkim simulacijama. S obzirom da je za uspešno numeričko modeliranje važna matematička formulacija mehaničkog odgovora hiperelastičnih materijala, a to

podrazumeva definisanje funkcije energije deformacije, u radu su predstavljeni najčešće korišćeni materijalni modeli za numeričko modeliranje u savremenim programskim paketima (Abaqus, ANSYS, etc.) koje će autori koristiti u daljem istaživanju.

Važno je napomenuti da izbor odgovarajućeg hiperelastičnog materijalnog modela zavisi od vrste materijala, nivoa deformacije i dostupnih eksperimentalnih podataka. Zbog toga je jedan od doprinosa ovog rada pregled dostupnih materijalnih modela i mogućnost njihove primene. Ovaj rad može poslužiti inženjerima za brzo i lako razumevanje materijalnih modela, kao i izbor odgovarajućeg modela pri rešavanju različitih problema.

Poseban fokus autora u ovom radu je uloga hiperelastičnih materijala u uređajima za seizmičku izolaciju. Detaljno upoznavanje sa ponašanjem hiperelastičnih materijala koji ulaze u sastav uređaja za seizmičku izolaciju predstavlja polaznu osnovu za dalja, složenija istraživanja u oblasti zemljotresnog inženjerstva. Cilj autora je da sprovede numeričku analizu mehaničkog odgovora gumenih materijala pri prostom smicanju unutar složenog mehanizma (seizmičkog izolatora), kako bi se odabrao najpodesniji materijalni model za dalju upotrebu u naprednim numeričkim simulacijama. Ove preliminarne analize su početni koraci ka sveobuhvatnom istraživanju dinamičkih karakteristika višespratnih zgrada, mostova i drugih konstrukcija, koje će uključiti i poređenje dinamičkog odgovora bazno izolovanih i neizolovanih sistema prilikom dejstva zemljotresa.

Ciljevi održivog razvoja: COR9 – Industrija, inovacije i infrastruktura i COR11 – Održivi gradovi i zajednice.

ZAHVALNOST

Ovo istraživanje je podržalo Ministarstvo za nauku, tehnološki razvoj i inovacije Republike Srbije, Ugovorom o finansiranju naučno-istraživačkog rada zaposlenih u nastavi na Građevinsko-arhitektonskom fakultetu, Univerziteta u Nišu – Evidencioni broj: 451-03-34/2026-03/200095 od 05.02.2026. god. Takođe, koautor Katarina Slavković želi da izrazi zahvalnost Ministarstvu nauke, tehnološkog razvoja i inovacija Republike Srbije na podršci preko Matematičkog instituta Srpske akademije nauka i umetnosti.

LITERATURA

- [1] Korunović Nikola: **Statička analiza ponašanja automobilske pneumatike metodom konačnih**

- elemenata. *Magistarski rad, Mašinski fakultet u Nišu*, Niš, 2003.
- [2] Boyce C. Mary, Arruda M. Ellen: **Constitutive Models of Rubber Elasticity: A Review**. *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 73, No. 3, 504-523, 2000. [10.5254/1.3547602](https://doi.org/10.5254/1.3547602)
- [3] He Hong, Zhang Qiang, Zhang Yaru, Chen Jianfeng, Zhang Liqun, Li Fanzhu: **A comparative study of 85 hyperelastic constitutive models for both unfilled rubber and highly filled rubber nanocomposite material**. *Nano Materials Science*, Vol. 4, No. 2, 64-82, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.nanoms.2021.07.003>
- [4] ABAQUS Documentation. Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2013.
- [5] Khaniki B. Hossein, Ghayesh H. Mergen, Chin Rey, Amabili Marco: **Hyperelastic structures: A review on the mechanics and biomechanics**. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 148, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104275>
- [6] Horgan Cornelius, Saccomandi Giuseppe: **Constitutive Modelling of Rubber-Like and Biological Materials with Limiting Chain Extensibility**. *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 7, No. 4, 353-371, 2002. <https://doi.org/10.1177/108128028477>
- [7] Gasser T. Cristian, Ogden W. Ray, Holzapfel A. Gerhard: **Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations**. *Journal of The Royal Society Interface*, Vol. 3, No. 6, 15-35, 2006. <https://doi.org/10.1098/rsif.2005.0073>
- [8] Topol Heiko, Al-Chlahawi J. Murtadha, Demirkoparan Hasan, Merodio José: **Bulging initiation and propagation in fiber-reinforced swellable Mooney-Rivlin membranes**. *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 128, No. 8, 2021. <https://doi.org/10.1007/s10665-021-10123-5>
- [9] Topol Heiko, Stoffel Marcus, Markert Bernd, Pence J. Thomas: **Modeling of mechanosensitive remodeling processes in collagen fibers**. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 23, No. 3, 2023. <https://doi.org/10.1002/pamm.202300007>
- [10] Topol Heiko, Demirkoparan Hasan, Stoffel Marcus, Markert Bernd, Merodio José: **Bifurcation of fiber reinforced inflated membranes with different natural configurations of the constituents**. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 22, No. 1, 2023. <https://doi.org/10.1002/pamm.202200004>
- [11] Dixit Shubhra, Gupta Surbhi, Sharma Ajay: **Surgical Devices for Biomedical Implants**. Additive Manufacturing for Biomedical Applications, 195-218, 2024. [10.1007/978-981-97-5456-4_10](https://doi.org/10.1007/978-981-97-5456-4_10)
- [12] Martins Pedro, Natal Jorge Renato, Ferreira Antonio: **A Comparative Study of Several Material Models for Prediction of Hyperelastic Properties: Application to Silicone-Rubber and Soft Tissues**, *Strain*, Vol. 42, No. 3, 135-147, 2006. <https://doi.org/10.1111/j.1475-1305.2006.00257.x>
- [13] Yu Shi, Chongyang Ye, Rong Liu: **Three-dimensional dynamic homogenous modeling: The biomechanical influences of leg tissue stiffness on pressure performance of compression biomedical therapeutic textiles**. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, Sec. Biomechanics, Vol. 12, 2024. <https://doi.org/10.3389/fbioe.2024.1418047>
- [14] Wakabayashi Noriyuki, Ona A. Mel, Suzuki Toru, Igarashi Yoshimasa: **Nonlinear finite element analyses: Advances and challenges in dental applications**. *Journal of dentistry*, Vol. 36, No. 7, 463-471, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.jdent.2008.03.010>
- [15] Mendizabal Andrea, Márquez-Neila Pablo, Cotin Stéphane: **Simulation of hyperelastic materials in real-time using deep learning**. *Medical Image Analysis*, Vol. 59, 2020. [10.1016/j.media.2019.101569](https://doi.org/10.1016/j.media.2019.101569)
- [16] Ibrahim M. Alarifi: **A comprehensive review on advancements of elastomers for engineering applications**. *Advanced Industrial and Engineering Polymer Research*, Vol. 6, Issue4, 451-464, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.aiepr.2023.05.001>
- [17] Korunović Nikola, Banić Milan, Trifunović Milan, Pavlović Ana: **Bergström-Boyce vs. Hyperelastic rubber models in structural analysis of tires**. *Fasta Universitatis: Mechanical Engineering*, Vol. 19, No. 4, 767-779, 2021. <https://doi.org/10.22190/FUME191124002K>
- [18] Milković Dragan, Simić Goran: **Proračun gumenometalnih elemenata u oblasti velikih deformacija**. *Zbornik radova / XII naučno – stručna konferencija o železnici ŽELKON '06*, Niš, Srbija, 75-78, 2006. https://railcon.rs/Proceedings/Zelkon_2006.pdf
- [19] Chen Lisha, Yang Chenghao, Wang Hua, David T. Branson, Jian S. Dai, Kang Rongjie: **Desing and modeling of soft robotic surface with hyperelastic material**. *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 130 (3), 109-122, 2018. [10.1016/j.mechmachtheory.2018.08.010](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2018.08.010)
- [20] Emanuele Vignali, Emanuele Gasparotti, Katia Capellini, Benigno Marco Fanni, Luigi Landini, Vincenzo Positano, Simona Celi: **Modeling of biomechanical interaction between soft robotic instruments: importance of constitutive anisotropic hyperelastic formulations**. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 40, No. 1, 224-235, 2021. <https://doi.org/10.1177/0278364920927476>
- [21] Sergio Reyes, José Luis Almazán: **A three-dimensional isolation system with uplift allowed for industrial structures**. *XII Congreso Chileno de Sismología e Ingeniería Sísmica ACHISINA 2019*, Valdivia, 03.-05. April 2019.
- [22] Zorić Andrija, Zlatkov Dragan, Trajković-Milenković Marina, Mijalković Marina, Mladenović Biljana:

- Numerical Analysis of an innovative energy dissipation device.** *Jurnal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, Vol. 18, No. 1, 16-28, 2024. [10.24874/jsscm.2024.18.01.02](https://doi.org/10.24874/jsscm.2024.18.01.02)
- [23] Zorić Andrija, Trajković-Milenković Marina, Zlatkov Dragan, Petrović Žarko, Vacev Todor: **Analytical Prediction of Mechanical Properties in Horizontal Direction of Lead-Rubber Bearings.** *Facta Universitatis Series: Architecture and Civil Engineering*, Vol. 20, No. 1, 1-14, 2022. <https://doi.org/10.2298/FUACE220421001Z>
- [24] Zorić Andrija, Zlatkov Dragan, Trajković Milenković Marina, Vacev Todor, Petrović Žarko: **Analysis of the seismic response of an RC frame structure with lead rubber bearings.** *Building Materials and Structures*, Vol. 65 (2), 73-80, 2022. <https://scindeks.ceon.rs/article.aspx?artid=2217-81392202073Z>
- [25] <https://dis-inc.com/brochures.html> (24.04.2024.)
- [26] James M. Kelly, Michel S. Chalhoub: **Earthquake Simulator Testing of a Combined Sliding Bearing and Rubber Bearing Isolation System, Report No. NSF/ENG-87049.** *Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, USA*, 1990.
- [27] Soong Tse Teh, Costantinou Michael C: **Passive and Active Structural Vibration Control in Civil Engineering**, Springer, Wien, 1994.
- [28] Saaed Tarek Edrees, Nikolakopoulos George, Jonasson Jan-Erik, Hedlund Hans: **A state-of-the-art review of structural control systems**, *Jurnal of Vibration and Control*, Vol. 21, No. 5, 919-937, 2013. <https://doi.org/10.1177/1077546313478294>
- [29] Pianese Gaetano, Milani Gabriele, Milani Federico: **Prediction of the optimal vulcanization of a fiber-reinforced elastomeric isolator made of natural rubber-ethylene propylene diene monomer blend.** *Polymer Engineering & Science*, Vol. 62, No. 8, 2421-2443, 2023. <https://doi.org/10.1002/pen.26386>
- [30] Zorić Andrija: **Razvoj numeričkog i analitičkog modela inovativnog čeličnog disipatora seizmičke energije.** Doktorska disertacija. *Građevinsko-arhitektonski fakultet, Univerzitet u Nišu*, Niš, 2022.
- [31] Trajković Milenković Marina, Bruhns T. Otto, Zorić Andrija: **On instability of constitutive models for isotropic elastic-perfectly plastic material behaviour at finite deformations.** *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Jurnal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 235, No. 20, 4692-4703, 2021. <https://doi.org/10.1177/0954406220920687>
- [32] Gilles Marckmann, Erwan Verron: **Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials.** *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 75, No. 5, 835-858, 2006. [10.5254/1.3547969](https://doi.org/10.5254/1.3547969)
- [33] Stephen K. Melly, Liwu Liu, Yanju Liu, Jinsong Leng: **A review on material models for isotropic hyperelasticity**, *International Journal of Mechanical System Dynamics*, Vol. 1, 71-88, 2021. <https://doi.org/10.1002/msd2.12013>
- [34] Trajković Milenković Marina, Bruhns T. Otto: **An alternative approach to finite deformation.** *Facta Universitatis: Architecture and Civil Engineering*, Vol. 16, No. 1, 67-80, 2018. <https://doi.org/10.2298/FUACE170206006T>
- [35] Trajković Milenković Marina: **Numerical implementation of an Eulerian description of finite elastoplasticity.** *Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften der Ruhr-Universität Bochum*, PhD thesis, Bochum, 2016. [RUB-Repository](https://doi.org/10.2298/FUACE170206006T)
- [36] Gerhard A. Holzapfel: **Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering.** Wiley, 2000.
- [37] Zorić D. Nemanja, Tomović M. Aleksandar: **Mehanika kontinuuma za inženjere.** *Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet*, Beograd, 2022. <https://plus.cobiss.net/cobiss/sr/sr/bib/79295497>
- [38] Korobeynikov S.N., Larichkin A.Yu., Rotanova T.A.: **Hyperelasticity models extending Hooke's law from small to moderate strains and experimental verification of their scope of application.** *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 252, Article 111815, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111815>
- [39] Brepols Tim, Vladimirov N. Ivaylo, Reese Stefanie: **Numerical comparison of isotropic hypo- and hyperelastic-based plasticity models with application to industrial forming processes.** *International Journal of Plasticity*, Vol. 63, 18-48, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.06.003>
- [40] Kang Jia, Tan Long-Xu, Liu Quan-Pu, Wang Si-Yu, Bruhns T. Otto, Xiao Heng: **Unified and accurate simulation for large elastic strain responses of rubberlike soft materials under multiple models of loading.** *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 36, 155-169, 2024. <https://doi.org/10.1007/s00161-023-01267-z>